On a sum related to a multiple L-function (Analytic Number Theory and Related Topics)

石川, 秀明

数理解析研究所講究録
1160 巻 2000 年 25-31

On a sum related to a multiple L-function

石川秀明 (Hideaki Ishikawa) 新潟大学大学院自然科学研究科 D2

1. 導入

次のような和を考えてみる。

$$H_j(x) := \sum_{\substack{n_1 n_2 \dots n_j \le x \\ \text{with } n_1 < n_2 < \cdots < n_j}} \chi_1(n_1)\chi_2(n_2)\dots\chi_j(n_j) \tag{1}$$

ここで χ_i は mod q の Dirichlet 指標である。この和 $H_j(x)$ を多重指標和と呼ぶ事にする。また

$$f_j(n) = \sum_{\substack{m_1 m_2 \dots m_{j-1} | n \\ m_1 < \cdots < m_{j-1} < \frac{n}{m_1 \cdots m_{j-1}}}} \chi_1(m_1)\dots\chi_{j-1}(m_{j-1})\chi_j\left(\frac{n}{m_1 m_2 \dots m_{j-1}}\right)$$

なる関数 $f_j(n)$ を定義すれば, これを用いて、

$$H_j(x) = \sum_{n \le x} f_j(n)$$

である。問題として「この和 (1) の ($x \to \infty$ とした時の) 漸近的な挙動 」を考えてみよう。これは重み付きの格子点問題といえるし、約数問題の一般化であるともいえる。アプローチの仕方は大きく分けて二通り考えられる。格子点を数えるという発想ともう一つは生成関数の解析的性質からとらえるという発想である。条件として順序 $n_1 < n_2 \cdots < n_j$を考慮しながら和を考えるということが、この問題を複雑にする。このように順序を入れたタイプの和はこれまで論じられたことが無い様である。ここで

$$L_j(s) = \sum_{0 < n_1 < .., < n_k} \frac{\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)\dots\chi_j(n_j)}{(n_1 \quad n_2 \quad \dots\dots \quad n_j)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_j(n)}{n^s} \qquad (\Re s > 1) \tag{2}$$

なる級数で複素数 s の関数を定義して、これを多重 L 関数と呼ぶことにする。ちなみに、この関数もこれまで研究されたことが無い様である。今回は関数 (2) の性質を調べ、その解析的な性質を通して多重指標和 (1) を考察する。

Remark 1. 順序 $n_1 < n_2 \cdots < n_j$ を考慮に入れない和

$$\sum_{n_1 n_2 \dots n_j \le x} \chi_1(n_1)\chi_2(n_2)\dots\chi_j(n_j) \qquad (x \to \infty) \tag{3}$$

であれば、対応する生成関数 $G(s)$ は

$$G(s) = L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)\dots L(s,\chi_j) \tag{4}$$

なる Dirichlet の L 一関数を j 個掛け合わせたものとなる。この生成関数の性質から和 (3) を調べるには、洗練された一般論 [5]、[6]、[9] などが存在していて、その和の挙動については或る程度のことが直ちに言える。この時、生成関数 $G(s)$ が幾つかの条件を満たしていることが要求される (例えば関数等式を持っているかとかその形はどうかとか)。

現在この関数 $L_j(s)$ には関数等式が見つからない。有ったとしても既に知られている一般論の条件に当てはまるような、きれいな形ではないと思われる。関数等式を見つけられるかどうかというのも今後の一つの大きな問題である。

2. 多重ゼータ関数の一般化

多重ゼータ関数とは次のような級数で定義する：

$$\zeta_k(s_1,\dots,s_k) = \sum_{0<n_1<\cdots<n_k} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}} \tag{5}$$

ここで $s_i (i = 1, 2, \dots, k)$ は複素数。この級数は $\Re(s_i) \geq 1$ $(i = 1, 2, \dots, k-1)$ かつ $\Re(s_k) > 1$ であれば絶対収束していて、その領域で多変数の正則関数を定める。この時、特殊値 $\zeta_k(a_1, \dots, a_k)$（各 $a_i, (i = 1, \dots, k)$ は自然数）の研究が Euler 以来, そして最近の Zagier の研究いたるまで多くの数学者に依って研究がなされてきている [15], [16], [3]。この級数 (5) で定義された多変数関数の解析接続は J. Zhao [17] による仕事と S. Egami, Y. Tanigawa, S. Akiyama [1] による仕事がある。特に後者の 3 人の仕事について紹介すると、彼らは Euler-Maclaurin の和公式を用いた方法で解析接続を行い、特殊値$\zeta(m_1, \dots, m_k)$（各 $m_i(i = 1, \dots, k)$ は非正整数）の研究を行っている。

ここで (5) を一般化した二つの級数を考えてみよう。β_i $(i = 1, 2, \cdots, q)$ は $[0, 1)$ なる実数値として、χ_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ は $\mod q$ $(q \geq 2)$ の Dirichlet 指標とする。この時

$$\zeta_k(s_i \mid \beta_i) = \sum_{0<n_1<\cdots<n_k} \frac{1}{(n_1+\beta_1)^{s_1}(n_2+\beta_2)^{s_2}\dots(n_k+\beta_k)^{s_k}} \tag{6}$$

と

$$L_k(s_i \mid \chi_i) = \sum_{0<n_1<\cdots<n_k} \frac{\chi_1(n_1)}{n_1^{s_1}} \frac{\chi_2(n_2)}{n_2^{s_2}} \cdots \frac{\chi_k(n_k)}{n_k^{s_k}}, \tag{7}$$

なる級数を考え、それぞれ多重フルビッツゼータ関数、多重 L 関数と呼ぶことにしよう。この二つの級数については Euler-Maclaurin の和公式を少し使いやすい形に修正したものを用いることで $\mathbb{C}^k$ に有理型に解析接続ができる（see [2]）。今回の研究対象である $L_j(s)$ は、(7) の $k = j$ の場合であり、そこで j 個の複素変数 $s_1, s_2, \dots s_j$ を $s_1 = s_2 = \dots = s_j$ と全て等しいと考え、改めてそれを s とおいたものである。

Remark 2. 級数 (7) に対して「多重 L 関数」という言葉を用いたが、T. Arakawa と M. Kaneko は (5) の一般化として

$$\begin{aligned} &ML(s_1,\dots,s_k) = \\ &\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n_1)}{n_1^{s_1}} \frac{\chi_2(n_2)}{(n_1+n_2)^{s_2}} \cdots \frac{\chi_k(n_k)}{(n_1+\cdots+n_k)^{s_k}} \end{aligned} \tag{8}$$

なる「多重 L 関数」を定義し、研究している。

Remark 3. 最近 K.Matsumoto は次のような級数を定義し研究を行った [13]：

$$\begin{aligned} &\zeta_k(v_1,\dots,v_k;\quad \alpha_1,\dots,\alpha_k;\quad w_1,\dots,w_k) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=0}^{\infty} (m_1w_1+\alpha_1)^{-v_1}(m_1w_1+m_2w_2+\alpha_2)^{-v_2} \\ &\quad \times\cdots\times(m_1w_1+m_2w_2+\cdots+m_kw_k+\alpha_k)^{-v_k} \end{aligned} \tag{9}$$

ここで $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k$ は複素数値で $|\arg w_j| < \pi$、$w_j \neq 0 (1 \leq j \leq k)$。そして $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は正の実数値とする。この級数は、その特別な場合として (5) や (6) を含んでいる。K. Matsumoto は変数 w_i の漸近展開を論じる課程でこの級数 (9) で定義される多変数関数の解析接続を行った。そこではメリンーバーンズ型の積分が有効に用いられた。その方法は変数 w_i の情報を得るための非常に見通しのよい証明も同

時に与える。この解析接続時にメリンーバーンズ型の積分を利用するという発想は、M. Katsurada が最初に発見し深めたアイディアである（正確には M. Katsurada は (9) とは少し形が違う級数の研究にこのメリンーバーンズ型の積分を利用することを思い付いた [11]）。

3. 報告内容

まずは生成関数である $L_j(s)$ の性質について述べる。区間 $[0,1]$ に存在する分母が j 以下の分数をすべて考える。この集合を周期 1 で実数全体に延長したものを F_j として、その部分集合 $F_{j,k}$ を次で定義する

$$F_{j,k} = \{x \in F_j \quad | \quad x \le k\}$$

この時

Theorem 1. $L_j(s)$ は有理型関数で、その *'possible' pole* は実軸上にのみ有り、$F_{j,1}$ と一致する。もし用いる指標 χ_iがすべて単位指標でないと仮定すると、その時は $F_{j,1/2}$ と一致する。また *pole* の位数は 1 とは限らない。

定理における主張はあくまで 'possible' pole でありそれが真に pole であるかどうかは、さらにローラン係数を調べる必要がある。$j=2$ の場合に関しては次のように完全に決定することができる：

Theorem 2. χ_1 と χ_2 は *primitive* な指標で、$\chi_1\chi_2 \neq \chi_0$と仮定すると、

$$L_2(s)\begin{cases} \text{は整関数} & \text{if} \quad \chi_1\chi_2(-1)=1 \\ \text{は有理型でその } poles \text{ は } \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\cdots & \text{if} \quad \chi_1\chi_2(-1)=-1 \end{cases}$$

Remark 4. $j \ge 3$ の場合では真の pole かどうかの完全決定に成功していない。

とにもかくにも生成関数が以上のように pole を持っているので $H_j(x)$ には、これら pole の情報が反映して

$$H_j(x) = \sum_{\xi:\text{pole in } \Re s>0} P_{j,\xi}(\log x)x^{\xi} + \text{error term} \tag{10}$$

となる事を（安易では或るが）期待して当面の目標とする。

またこのような和を考える時は、用いる指標は全て単位指標でないもので議論することにする (そのような場合について議論が理解できれば十分である)。よって第一主要項の多きさは、$P_{j,1/2}(\log x)x^{1/2}$ となる漸近式が目標の形である。

関数 $F(x)$ に対して

$$R_k[F(x)] := \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-u)^{k-1}F(u)du$$

なる重みをつけて積分をすることを $F(x)$ の k 回 Riesz mean を考えるという。期待 (10) には及ばないが次のような結果が得られた、

Theorem 3. 任意に小さい実数 $\epsilon > 0$ に対して

$$\frac{1}{x^{j-1}}R_{j-1}[H_j(x)] = \sum_{\xi:pole \text{ in } \Re s>0} P_{j,\xi}(\log x)x^{\xi} + O_q(x^{\frac{1}{j+1}+\epsilon}),$$

ここで $P_{j,\xi}(t)$ はある多項式でその次数は *pole* ξ の位数によって決まる。係数の定義式も書ける。

Theorem 3 において重みの回数を減らしたいのだが $0 < \Re s$ にある pole のうち最小のものまで主要項として取り出すには現段階では重みの回数がこれだけ必要である。もっと詳しく $H_j(x)$ の様子を記述しようと思うと、$L_j(s)$ の性質を詳しく知る必要がある。例えば領域 $0 < \sigma$ で虚軸方向の $|L(_j s)|$ 大きさ評価をどこまで鋭くできるか？とか、関数等式はあるのか？とかである。しかしながら現時点では、$L_j(s)$ について得られている情報があまりにも乏しい。$H_j(x)$ は期待（10）のようになっているだろうか？

講演時での誤った発表とその修正個所について

講演時において自分はかなり間違ったことを言っていました。本稿では修正バージョンを載せています。では何処が間違っていて、どの様に修正されたのかを述べますと

1.　$L_j(s)$ の 'possible' pole の位置について「全てのχ_i が単位指標χ_0でないと仮定すると $0 < \Re s$ における possible pole は

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ldots,\ \frac{1}{j}$$

のみ。」と述べましたがこれは誤りで実際は本稿 Theorem 1 に記述した通りです。

2.　「'possible' pole の位数は全て一位」だとばかり勘違いしていましたが実際には本稿 Theorem 1 に記述した通り位数 1 とは限りません。

3.　$L_j(s)$ の pole について上記の 1 と 2 のように勘違いしたため、$H_j(x)$ の漸近的な挙動についても「期待として

$$H_j(x) = C_{1/2}x^{1/2} + C_{1/3}x^{1/3} + \cdots + C_{1/j}x^{1/j} + \text{誤差項}$$

となるのではないか」などと言っていましたが、正しくは本稿の期待（10）の通りです。また以上のような pole に関しての勘違いとその修正の末、本稿 Theorem 2 のような Riesz mean の結果になります。

ここまでの話しは、$H_j(x)$ を調べるために、その生成関数である $L_j(s)$ の解析的性質からアプローチをして Theorem 2 を得たのであった。その Theorem 2 は $H_j(x)$ の $j-1$ 回の Riesz mean を記述するというものであった。しかし、$H_2(x)$ に関して言うならば、別のアプローチ（格子点を数えるという発想）によって、次のような結が果得られる：

Proposition 1.

$$H_2(x) = \frac{A_{\chi_1,\chi_2}(1)}{q}x^{1/2} + O_q(x^{\frac{1}{3}+\epsilon})$$

ここで $A_{\chi_1,\chi_2}(1)$ は

$$A_{\chi_1,\chi_2}(1) = \sum_{a_1=1}^{q-1}\sum_{a_2=1}^{q-1}\chi_1(a_1)\chi_2(a_2)\tilde{B}_1(\frac{a_1-a_2}{q})$$

とする。

これは簡単なので証明のアイディアを載せておく。

証明　初等的な変形をすると、

$$H_2(x) = \sum_{a_1=1}^{q-1}\sum_{a_2=1}^{q-1}\chi_1(a_1)\chi_2(a_2)\sum_{\substack{n_1n_2\le x\\ \text{with } n_1<n_2\\ n_i\equiv a_i(\bmod q)\text{for} i=1,2}} 1\times 1 \tag{11}$$

ここで $n_i = m_i q + a_i$ とおいて、簡単な計算を行うと

$$
\begin{aligned}
H_2(x) &= \sum_{a_1=1}^{q-1}\sum_{a_2=1}^{q-1}\chi_1(a_1)\chi_2(a_2) \\
&\quad \times \sum_{0\le m_1<\frac{\sqrt{x}-a_1}{q}}\left\{-\tilde{B}_1\left(\frac{1}{q}\left(\frac{x}{m_1q+a_1}-a_2\right)\right)+\tilde{B}_1\left(\frac{a_1-a_2}{q}\right)\right\}+O_q(1) \\
&= \frac{A_{\chi_1,\chi_2}(1)}{q}x^{1/2}+E_2(x)+O_q(1)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
E_2(x) = -\sum_{a_1=1}^{q-1}\chi_1(a_1)\sum_{a_2=1}^{q-1}\chi_2(a_2)\sum_{0\le m_1<\frac{\sqrt{x}-a_1}{q}}\tilde{B}_1\left(\frac{1}{q}\left(\frac{x}{qm_1+a_1}-a_2\right)\right)
$$

と $\tilde{B}_1(y) = y - [y] - \frac{1}{2}$である。かなりおおざっぱであるけれども

$$
|E_2(x)| \le \sum_{a_1=1}^{q-1}\sum_{a_2=1}^{q-1}\left|\sum_{0\le m_1<\frac{\sqrt{x}-a_1}{q}}\tilde{B}_1\left(\frac{1}{q}\left(\frac{x}{qm_1+a_1}-a_2\right)\right)\right|
$$

と評価して、

$$
\left|\sum_{0\le m_1<\frac{\sqrt{x}-a_1}{q}}\tilde{B}_1\left(\frac{1}{q}\left(\frac{x}{qm_1+a_1}-a_2\right)\right)\right|
$$

なる所を評価する。この時、周期的ベルヌーイ多項式をフーリエ展開して、指数和の評価をうまく行って、Proposition 1 が得られる。

証明終わり

この誤差項 $E_2(x)$ の上からの評価はもう少し良く出来ると思うが（現在知られているこのタイプの和の評価の結果を使ってという意味）その事は、今回の話しの主題から外れるのでこれ以上は止めておく。この問題を考えるとき、用いる指標の順番を意識させたいときは

$$
H_2(x) = \sum_{\substack{n_1n_2\le x\\ n_1<n_2}}\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)
$$

のことを特に

$$
H_2^{\chi_1,\chi_2}(x)
$$

のように右肩に指標の順序を明示することとする。

Proposition 2. 次の条件を仮定する：χ_1,χ_2は *primitive,* な指標で、$\chi_1\chi_2 \ne \chi_0$ とする。この時

$$
H_2^{\chi_1,\chi_2}(x) \qquad \text{または} \qquad H_2^{\chi_2,\chi_1}(x)
$$

のどちらか一方の誤差項は

$$
E_2(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right)
$$

と評価できる。ここでϵは任意に小さい正の実数値。

Remark 5. 実はこの Proposition 2 も講演時から多少修正したものを記述している。

証明

$$\sum_{n_1n_2\le x}\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)=\sum_{l\le x^{1/2}}\chi_1\chi_2(l)+H_2^{\chi_1,\chi_2}(x)+H_2^{\chi_2,\chi_1}(x)$$

が成立している。右辺御第一項目は、条件から$\ll 1$である。また右辺の$H_2^{\chi_1,\chi_2}(x)$と$H_2^{\chi_2,\chi_1}(x)$からのそれぞれの主要項を足すと0になることがいえる。一方左辺の絶対値を取ったものを下から評価すると、$\Omega(x^{\frac{1}{4}+\epsilon})$となることは、良く知られたことである。

証明終わり

以上のように$H_2(x)$であれば、既に知られた結果を使うことで直ちに主要項＋誤差項の形に書くことが出来て、しかも誤差項に対しては上からの評価と下からの評価が或る程度は言えてしまう。これは生成関数の立場から$H_2(x)$を眺めたときよりも、明らかに良い結果を与えている。ではこのような（生成関数を経由しない）方法が$H_j(x)$ （$3\le j$）に対しても通用して、期待（10）の結果が得られるのではないか？と考えてみたくなる。実際にやってみよう。初等的な変形によって

$$\begin{aligned}H_3(x)&=\frac{A_{\chi_2,\chi_3}(1)}{q}L(1/2,\chi_1)x^{1/2}+\frac{A_{\chi_1,\chi_2,\chi_3}(1,1)}{q}x^{1/3}\\&\quad-\frac{A_{\chi_2,\chi_3}(1)}{q}\Big(\sum_{x^{1/3}\le n_1}^{\infty}\frac{\chi_1(n_1)}{n_1^{1/2}}+\sum_{n_1<x^{1/3}}\chi_1(n_1)n_1\Big)\\&\quad+E_{3,1}(x)+E_{3,2}+O_q(1)\end{aligned}$$

ここで式中の記号については

$$A_{\chi_1,\chi_2,\chi_3}(1,1)=\sum_{a_1=1}^{q-1}\sum_{a_2=1}^{q-1}\sum_{a_3=1}^{q-1}\chi_1(a_1)\chi_2(a_2)\chi_3(a_3)\tilde{B}_1(\frac{a_1-a_2}{q})\tilde{B}_1(\frac{a_2-a_3}{q})$$

と

$$E_{3,1}(x)=-\sum_{a_3=1}^{q-1}\chi_3(a_3)\sum_{1\le n_1<x^{1/3}}\sum_{n_1<n_2<x^{1/2}}\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)\tilde{B}_1\Big(\frac{1}{q}(\frac{x}{n_1n_2}-a_3)\Big),$$

と

$$E_{3,2}(x)=\sum_{a_2=1}^{q}\sum_{a_3=1}^{q-1}\chi_2(a_2)\chi_3(a_3)\tilde{B}_1(\frac{a_2-a_3}{q})\sum_{1\le n_1<x^{1/3}}\chi_1(n_1)\tilde{B}_1\Big(\frac{1}{q}(\sqrt{\frac{x}{n_1}}-a_2)\Big)$$

である。ここで期待されるのは、$E_{3,1}(x)$が誤差項として評価されることである。しかし、これはこれでまた難しい問題に思える。

4. 最後に

多重指標和$H_j(x)$なるものを現在も研究中であるが、本稿で載せた、期待（10）の

$$H_j(x)=\sum_{\xi:\text{pole in }\Re s>0}P_{j,\xi}(\log x)x^{\xi}+\text{error term}$$

のような形はどうも無理なのではないかと思い始めている。むしろ次のように目標を設定すべきではないか：

$$H_j(x)=P_{j,1/2}(\log x)x^{\frac{1}{2}}+\quad 誤差項$$

これは（ 全てのχ_iは単位指標でないという条件の下での）最大の pole である$\xi=\frac{1}{2}$の情報だけが主要項に現れる形である（何故そう思うかという理由に関しては長くなるので今回は述べられない）。この話しを進展させ、近い内に報告する機会がもてたら幸いである

REFERENCES

[1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa , An analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers, preprint

[2] S. Akiyama, H.Ishikawa, On analytic continuation of multiple L-functions and related zeta-functions , preprint

[3] T.Arakawa and M.Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, to appear in Nagoya Math. J.

[4] F.V. Atkinson, The mean value of the Riemann zeta-function, *Acta Math.*, **81** (1949), 353-376.

[5] K. Chandrasekharan, *Arithmetical Functions*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[6] K. Chandrasekharan and R. Narasimhan, *Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions*, Ann. Math, 76 (1962), 93-136.

[7] K. Dilcher, Zero of Bernoulli, generalized Bernoulli and Euler polynomials, Memoirs of American Mathematical Society, number 386.

[8] S. Egami, *Introduction to multiple zeta function*, Lecture Note at Niigata University (in Japanese).

[9] J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions*, Lec. Note in Math. 899 (1981) 148-165.

[10] K. Inkeri, The real roots of Bernoulli polynomials, *Ann. Univ. Turku. Ser. A I* **37** (1959), 20pp.

[11] M. Katsurada, An application of Mellin-Barnes' type integrals to the mean squaare of Lerch zeta-functions, *Collect. Math.*, **48** (1997)

[12] M. Katsurada and K. Matsumoto, Asymptotic expansions of the mean values of Dirichlet L-functions. *Math. Z.*, **208** (1991), 23–39.

[13] K. Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, preprint.

[14] Y. Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L-functions. I, *Proc. Japan Acad.*, Ser. A Math. Sci. **61** (1985), 222–224.

[15] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, *First European Congress of Mathematics*, Vol. II, Birkhäuser, (1994) 210–220

[16] D. Zagier, Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values, *Research into automorphic forms and L functions (in Japanese) (Kyoto, 1992), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, **843** (1993), 162–170.

[17] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta functions, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.